

Андрейцев А.Ю., Вяла Ю.Е., Гейлик А.В., Клецька Т.С., Ляшко О.В.

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАВАНТАЖЕННЯ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

Дана стаття присвячена порівнянню методів розв'язання задачі про оптимальне завантаження транспортного засобу. Ця задача є однією з тих, що наочно демонструють переваги математичного моделювання в процесах вироблення та прийняття рішень при плануванні транспортних перевезень. Крім того, дана задача є однією з істотних складових логістичної програми при плануванні доставки вантажів.

Метою дослідження було порівняння різних методів розв'язання на прикладі задачі про оптимальне завантаження одного транспортного засобу. Задача про оптимальне завантаження належить до класу задач цілочисельного лінійного програмування. Існує ряд методів її розв'язання. У статті розглянуто деякі з них.

Графічний метод є найпростішим і наочним. Але його застосування стає неможливим, якщо кількість найменувань вантажів більша трьох. Метод відтинаючих площин базується на відтинанні від області допустимих розв'язків задачі з послабленими обмеженнями частин, що не містять цілочисельних розв'язків. Однак, в разі наявності декількох розв'язків, він не дозволяє знайти всі оптимальні плани.

Метод гілок та границь дозволяє знайти всі розв'язки. Однак він вимагає розв'язання великої кількості задач лінійного програмування. Метод динамічного програмування є одним з найпростіших в застосуванні і не вимагає громіздких обчислень при розв'язанні задач невеликої розмірності.

Для демонстрації переваг і недоліків зазначених методів розглянуто приклад задачі оптимального завантаження, що має декілька розв'язків. Описано процес розв'язання даної задачі кожним з методів. Застосування методу відтинаючих площин не дозволяє знайти всі оптимальні рішення. Метод гілок та границь приводить до необхідності розв'язання одинадцяти задач лінійного програмування. Використання методу динамічного програмування показує, що він є ефективним і найбільш простим у застосуванні.

На завершення, зазначено, що при збільшенні кількості найменувань вантажів, метод динамічного програмування вимагає істотного збільшення обсягу обчислень. Крім того, застосування даного методу ускладнюється при розв'язанні задачі про оптимальне завантаження більш ніж одного транспортного засобу.

Ключові слова. цілочисельне програмування, метод гілок та границь, метод відтинаючих площин, метод динамічного програмування.

Постановка проблеми. Задача про оптимальне завантаження транспортного засобу є однією з прикладних задач, що наочно демонструє переваги математичного моделювання в процесах прийняття рішень в сфері транспортних перевезень. Дана задача належить до класу задач цілочисельного лінійного програмування.

Оскільки витрати на транспортування вантажів є однією із складових їх вартості, то зменшення транспортних витрат є важливою складовою логістичної стратегії. При цьому суттєвим є не тільки витрати на перевезення вантажів але і максимальне завантаження транспортних засобів, оскільки їх кількість та пропускна спроможність шляхів перевезення є

обмеженими. Таким чином, задачі оптимізації транспортних перевезень мають важливе значення в практичній діяльності майбутніх фахівців транспортної галузі.

В даній роботі ми розглянемо найпростішу модель: задачу про оптимальне завантаження одного транспортного засобу.

Припустимо, що судно має вантажопідйомність M і можливе завантаження предметів n назв. Нехай k_i , $i = \overline{1, n}$ – кількість предметів i -ї назви, які треба завантажити, C_i – прибуток, якій дає транспортування одного предмета i -ї назви, m_i – вага одного предмета i -ї назви. Математична модель задачі в загальному випадку має вигляд:

$$z = C_1 k_1 + C_2 k_2 + \dots + C_n k_n \rightarrow \max$$

за умов, що

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \dots + m_n k_n \leq M$$

$$k_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

k_i – цілі невід'ємні числа.

Аналіз публікацій. Задачі цілочисельного програмування та методи їх розв'язання досить добре висвітленні в науковій та навчальній літературі. Для розв'язання даної задачі розроблено ряд різноманітних методів: графічний, гілок та границь [1,2], Гоморі [3], динамічного програмування [4] та інші. Методика розв'язання цілочисельних задач розвинута та проілюстрована на прикладах в роботах [5-10]. Але, нажаль, в даних роботах не розглянуто деякі особливості, що виникають при розв'язанні задачі оптимального завантаження транспортного засобу.

Мета роботи. Ми порівняємо ефективність чотирьох методів розв'язання сформульованої задачі у випадку, коли вона має декілька розв'язків

Виклад основного матеріалу. При використанні графічного методу ми будемо область допустимих розв'язків задачі лінійного програмування без обмежень цілочисельності та лінію (площину) нульового рівня. Далі, пересуваючи її паралельно, знаходимо максимальне значення функції z . Якщо воно є цілочисельним, то задача розв'язана. В іншому випадку пересуваємо лінію (площину) рівня в напрямку початку координат доти, поки вона пройде через першу точку з цілими координатами. Ці значення і будуть розв'язками задачі.

Даний метод є наочним і може бути використаний як демонстраційний. Але його недоліком є те, що він може бути використаний лише у випадку двох чи трьох типів вантажу ($n = 2, n = 3$). Зрозуміло, що в реальних умовах $n > 3$.

1. Метод відтинаючих площин або метод Гоморі є одним з найбільш розповсюджених методів відтинання розв'язання цілочисельних задач [1,5,6,8]. Ідея його полягає в тому, що з області G допустимих розв'язків задачі лінійного програмування без обмежень цілочисельності (послабленої задачі) можна виділити підобласть G^* , яка включає всі точки області G з цілими координатами, є опуклою та всі її крайні точки мають цілі координати. Процес розв'язання задачі цілочисельного програмування передбачає додавання до задачі з послабленими умовами нового обмеження і продовження пошуку оптимуму.

2. Суть методу Гоморі:

1. Знаходимо розв'язок послабленої задачі симплекс методом. Якщо її оптимальний розв'язок не містить дробових значень, то він є оптимальним і для початкової задачі.

2. Якщо в оптимальному розв'язку послабленої задачі є дробові значення, то вибираємо змінну з найбільшою дробовою частиною. Виражаємо відповідну базисну змінну через вільні та додаємо додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} k_i \geq \{b_j\},$$

де $\{x\}$ – дробова частина числа x .

3. Додаткове обмеження, після зведення його до канонічного виду, приєднуємо до останньої симплекс-таблиці. Отриману нову задачу розв'язуємо і перевіряємо отриманий розв'язок на цілочисельність. Якщо він не є цілочисельним, то алгоритм повторюємо, починаючи з п.2.

Недоліком даного методу є те, що у випадку, коли задача має більш ніж один розв'язок, ми не можемо знайти всі з них.

Метод гілок та границь є одним з найбільш ефективних методів неперервної і дискретної глобальної оптимізації. В його основу покладено той факт, що для одержання розв'язку задачі оптимізації в області допустимих розв'язків, можна розбити її на підмножини, знайти розв'язок задачі на кожній з підмножин і за оптимальне обрати найкраще з отриманих рішень.

Для цього необхідно [1]:

1. Знайти розв'язок даної задачі без урахування умови цілочисельності.

2. Якщо значення змінної в оптимальному плані послабленої задачі $k_i = k_i^*$ є дробовим, то можна стверджувати, що в оптимальному плані цілочисельної задачі для цієї змінної буде виконуватись одна з умов:

$$k_i \geq [k_i^*] + 1 \quad \text{або} \quad k_i \leq [k_i^*].$$

Тому, початкову задачу цілочисельного програмування можна розбити на дві, не пов'язані між собою задачі, в систему обмежень кожної з яких додається перша або друга нерівність.

3. Розв'язати послаблені задачі з додатковими нерівностями. Якщо оптимальні розв'язки є цілими, то фіксуємо їх. Якщо ж оптимальні розв'язки є дробовими, то розглядаємо наступне «розгалуження».

4. Кроки алгоритму, починаючи з 2, виконуються доти, поки не буде знайдено усі цілочисельні розв'язки. Оптимальним розв'язком даної задачі є той з них, значення цільової функції для якого є більшим.

Головний недолік алгоритму методу гілок та границь полягає в необхідності повністю розв'язувати задачі лінійного програмування, асоційовані з кожною із вершин багатогранника допустимих розв'язків. Для задач великої розмірності це вимагає значних і невиправданих, витрат часу. Незважаючи на даний недолік методу, він є найбільш надійним засобом розв'язання цілочисельних задач, які зустрічаються в практичних дослідженнях.

В основу методу динамічного програмування покладено можливість поділу певної задачі на більш прості частини і подальшим поетапним розв'язанням отриманої сукупності. Загальний критерій оптимальності є сумою частинних критеріїв на кожному з етапів.

Позначимо через x_i сумарну вагу предметів, рішення про завантаження яких прийняте на кроках, починаючи з i і закінчуючи n . Обмеження по вазі є єдиним, що пов'язує між собою n кроків прийняття рішення. Нехай $f_i(x_i)$ – максимальний прибуток на кроках починаючи з i і закінчуючи n .

Таким чином, $x_i - x_{i+1}$ є вагою, завантаженою на i -му кроці. Звідси $x_i - x_{i+1} = m_i k_i$ або $x_{i+1} = x_i - m_i k_i$.

Рекурентні співвідношення методу динамічного програмування мають вигляд:

$$f_n(x_n) = \max(C_n k_n)$$

$$f_i(x_i) = \max(C_i k_i + f_{i+1}(x_{i+1})) = \max(C_i k_i + f_{i+1}(x_i - m_i k_i)), i = \overline{1, n}, x_i = \overline{0, M}.$$

Даний метод є найпростішим при розв'язанні задач невеликої розмірності, оскільки не вимагає застосування симплекс методу

Проведемо порівняння ефективності описаних методів на конкретному прикладі.

На баржу вантажопідйомністю 10 вагових одиниць (далі ваг. од.) завантажуються предмети трьох назв. Дані про вагу одного предмета кожної назви і прибутки від його транспортування наведено в табл.1.

Таблиця 1 – Дані про вагу і прибутки

Номер предмета	m_i ваг. од.	C_i грош. од.
1	5	46
2	3	28
3	2	18

Необхідно знайти варіант завантаження, що забезпечує максимальний прибуток.

Відповідна цілочисельна задача:

$$\begin{aligned} 5k_1 + 3k_2 + 2k_3 &\leq 10 \\ k_i &\geq 0, k_i \in Z, i = \overline{1,3}. \\ z = 46k_1 + 28k_2 + 18k_3 &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (1)$$

Зазначимо, що у випадку нашої задачі без обмежень цілочисельності область допустимих розв'язків є симплекс з вершинами в точках з координатами $(0; 0; 0)$, $(2; 0; 0)$, $(0; 3\frac{1}{3}; 0)$, $(0; 0; 5)$ (див. рис. 1, а)

Максимальне значення $z_{\max} = 93\frac{1}{3}$ досягається у вершині $(0; 3\frac{1}{3}; 0)$. розглянемо грань симплекса $k_3 = 0$. Тоді пересуваючи лінію рівня в напрямку початку координат отримуємо перший цілочисельний розв'язок (рис. 1, б): $k_1 = 2, k_2 = 0, k_3 = 0; z = 92$.

Оскільки k_1 може приймати лише значення 0 або 1, то перевіряємо чи можна в даних випадках отримати інші оптимальні розв'язки.

При $k_1 = 0$ маємо область допустимих розв'язків:

$$\begin{aligned} 3k_2 + 2k_3 &\leq 10 \\ k_2 &\geq 0, k_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

та цільову функцію

$$z = 28k_2 + 18k_3 \rightarrow \max$$

Цілочисельним розв'язком цієї задачі є точка з координатами $k_2 = 2, k_3 = 2$ (див. рис.1,в) при цьому $z = 92$.

При $k_1 = 1$, маємо задачу цілочисельного програмування

$$\begin{aligned}
3k_2 + 2k_3 &\leq 10 \\
k_2 &\geq 0, \quad k_3 \geq 0, \\
k_2, k_3 &\in \mathbb{Z} \\
z &= 46 + 28k_2 + 18k_3 \rightarrow \max
\end{aligned}$$

Умови змінились, оскільки при $k_1 = 1$ на баржу вже завантажено 5 вагових одиниць, тобто можливо завантаження ще не більше ніж $10 - 5 = 5$ ваг. од. При цьому прибуток від завантаження однієї одиниці вантажу першої назви дорівнює 46 грош. од., тому загальний прибуток буде дорівнювати сумі прибутку від перевезення інших вантажів та 46.

Графічно (див. рис.1,г) знаходимо оптимальний цілочисельний розв'язок даної задачі $k_2 = 1, k_3 = 1, z = 92$.

Таким чином, маємо три оптимальні плани завантаження:

1. $k_1 = 2, k_2 = 0, k_3 = 0$;
2. $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 2$;
3. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$;

при застосуванні кожного з яких отримуємо прибуток 92 грош. од.

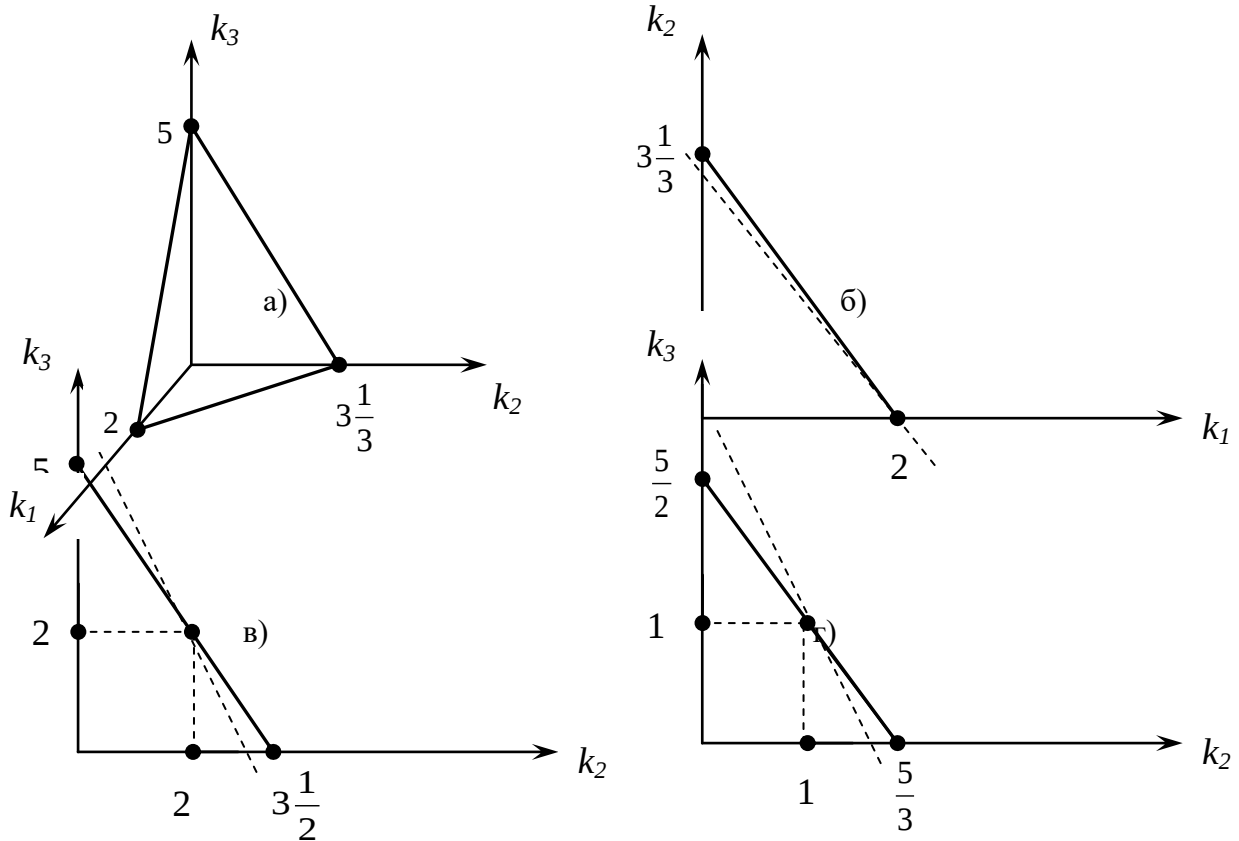


Рисунок 1 – Графічне розв'язання задачі (1)

Метод Гоморі. Для розв'язання задачі (1) без урахування умов цілочисельності зводимо її до канонічної форми, вводячи додаткову фіктивну базисну змінну k_4 . Отримуємо

$$\begin{aligned}
5k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 &= 10 \\
k_i &\geq 0, \quad i = \overline{1,4}.
\end{aligned}$$

$$z = 46k_1 + 28k_2 + 18k_3 \rightarrow \max$$

Розв'яжемо дану задачу симплекс методом (див. табл. 2).

Таблиця 2 – Розв'язання послабленої задачі симплекс методом

	k_1	k_2	k_3	k_4	B	C	K
	46	28	18	0			
	5	3	2	1	10	0	k_4
Δ	-46	-28	-18	0	0		
	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	2	46	k_1
Δ	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{46}{5}$	92		
	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	28	k_2
Δ	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{28}{3}$	$93\frac{1}{3}$		

Таким чином, отримуємо розв'язок

$$K = \left(0; 3\frac{1}{3}; 0; 0 \right), \quad z_{\max} = 93\frac{1}{3}.$$

Оскільки даний розв'язок не є цілочисельним, то продовжуємо розв'язання. Виразимо базисну змінну через вільні:

$$k_2 = 3\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}k_1 - \frac{2}{3}k_3 - \frac{1}{3}k_4.$$

Згідно з алгоритмом методу до обмеження задачі (1) додаємо ще одне:

$$\frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{3}k_4 \geq \frac{1}{3} \quad (2)$$

Після зведення задачі (1), (2) до канонічної форми, отримуємо М-задачу

$$\begin{aligned} 5k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 &= 10 \\ \frac{2}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + k_5 - k_6 &= \frac{1}{3} \\ k_i &\geq 0, \quad i = \overline{1,6}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$z = 46k_1 + 28k_2 + 18k_3 - Mk_6 \rightarrow \max$$

Внесемо дані в симплекс-таблицю та обчислимо оцінки (див. табл. 3).

Оскільки ми маємо дві від'ємні однакові оцінки, то за нову базисну змінну можна обрати k_1 або k_3 . В залежності від вибору отримаємо два нецілочисельних розв'язки задачі (3).

Повертаючись до кроку 2 отримуємо дві нові М-задачі, розв'язання яких приводить нас до таких цілочисельних розв'язків:

1. $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 2$; 2. $k_1 = 2, k_2 = 0, k_3 = 0$.

Обидва вони є оптимальними.

Таблиця 3 – Перша симплекс таблиця розв'язання задачі (3)

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	В	С	К
46	28	18	0	0	– М			
$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$	28	k_2
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	1	$\frac{1}{3}$	– М	k_6
$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}M$	0	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}M$	$-\frac{1}{3}M$	М	0	$\frac{280}{3} - \frac{1}{3}M$		

Зазначимо, що розв'язок $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$ не може бути знайдений за допомогою класичного алгоритму симплекс методу, незважаючи на те, що серед оцінок вільних змінних є нульові, що вказує на наявність у відповідних задач множини розв'язків, серед яких можуть бути і цілочисельні.

Метод гілок та границь. Граф розв'язання задачі (1) наведено на рис. 2. На першому кроці отримуємо розв'язок задачі 1 (див. табл. 1):

$$K = \left(0; 3\frac{1}{3}; 0 \right), \quad z_{\max} = 93\frac{1}{3}.$$

Оскільки k_2 є дробовим, то область допустимих розв'язків задачі (1) розпадається на дві. Перша з них

$$5k_1 + 3k_2 + 2k_3 \leq 10$$

$$k_2 \geq 4$$

$$k_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

є пустою множиною (задача 2), а друга, за умови максимізації функції приводить до задачі 3:

$$5k_1 + 3k_2 + 2k_3 \leq 10$$

$$k_2 \leq 3$$

$$k_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$z = 46k_1 + 28k_2 + 18k_3 \rightarrow \max$$

Зводячи цю задачу до канонічного виду, та розв'язавши її, отримуємо:

$$k_1 = \frac{1}{5}, k_2 = 3, k_3 = 0.$$

Таким чином, знову розглядаємо дві області. Для першої $k_1 \geq 1$ (задача 4), а для другої $k_1 \leq 0$. Але, оскільки усі $k_i \geq 0$, то $k_1 = 0$ (задача 5).

Вчиняючи так далі, отримуємо чотири цілочисельні розв'язки. Оскільки розв'язок задачі 8: $k_1 = 0, k_2 = 3, k_3 = 0$ дає значення цільової функції $z = 84$, то його відкидаємо і маємо три оптимальних плани завантаження баржі, що співпадають із знайденими графічно.

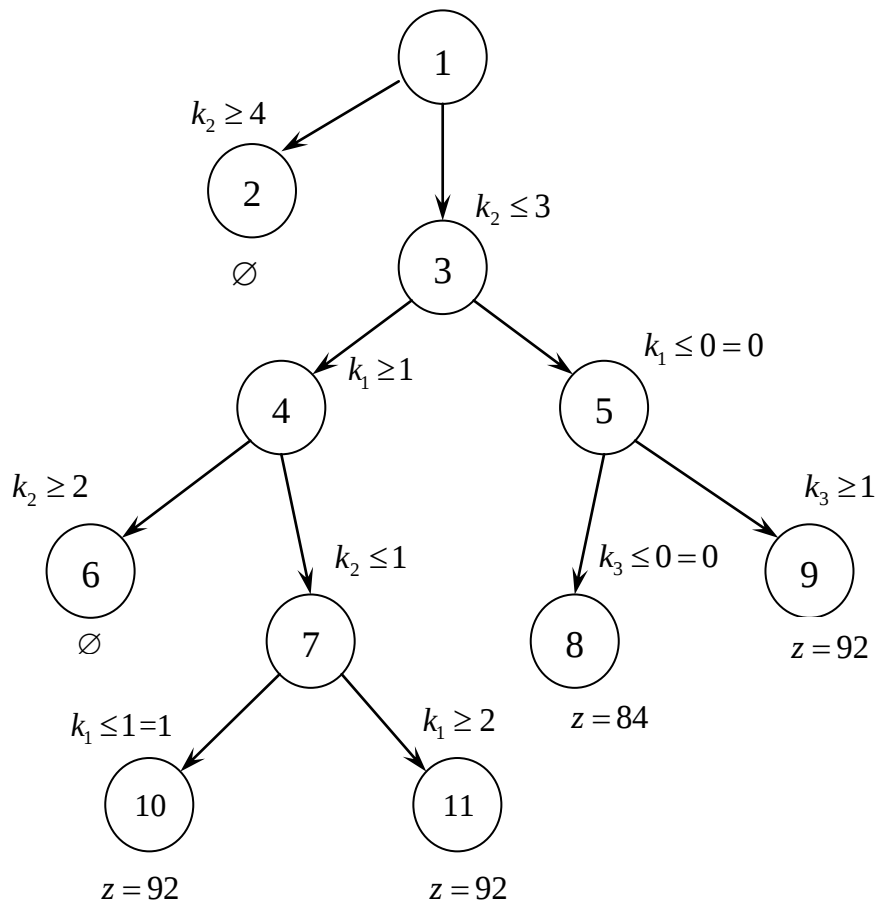


Рисунок 2 – Граф розв'язання задачі (1) методом гілок та границь

Метод динамічного програмування. Оскільки вага одного предмета всіх назв та вантажопідйомність баржі M є цілі числа, то і сумарна вага x_i на кожному кроці може набувати лише цілочислових значень.

Крок 3. Точна вага, яка може бути завантажена на 3-му кроці, невідома, але вона може дорівнювати 0, 2, 4, 6, 8, 10 оскільки $M = 10$. Максимальна кількість предметів 3-го типу, яка може бути завантажена дорівнює 5. Це означає, що можливими значеннями x_3 будуть 0, 2, 4, 6, 8, 10.

Оптимальне рішення на 3-му кроці знаходиться за формулою:

$$f_3(x_3) = \max(18k_3), \quad k_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Результати обчислень наведено в таблиці 4.

Оскільки x_3 не може набути значень 1, 3, 5, 7, 9, то для цих значень покладаємо $f_3(x_3) = 0$. Неможливим варіантам завантаження в таблиці відповідає символ «-». Наприклад, при

$k_3 = 2$ ми можемо отримати лише $x_3 = 4$. Усі інші значення сукупної маси є в цьому випадку неможливими. В останньому стовпчику наведено значення k_3 , при яких прибуток є максимальним, тобто дорівнює $f_3(x_3)$ для відповідного x_3 .

Таблиця 4 – Крок 3 розв’язання задачі (1) методом динамічного програмування

x_3	$18k_3$						$f_3(x_3)$	k_{3opt}
	$k_3 = 0$	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$	$k_3 = 4$	$k_3 = 5$		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	-	-	-	-	-	-	0	-
2	-	18	-	-	-	-	18	1
3	-	-	-	-	-	-	0	-
4	-	-	36	-	-	-	36	2
5	-	-	-	-	-	-	0	-
6	-	-	-	54	-	-	54	3
7	-	-	-	-	-	-	0	-
8	-	-	-	-	72	-	72	4
9	-	-	-	-	-	-	0	-
10	-	-	-	-	-	90	90	5

Крок 2. Знаходимо оптимальне рішення на 2-му кроці (див. табл. 5) із співвідношень

$$f_2(x_2) = \max(C_2 k_2 + f_3(x_3)) = \max(28k_2 + f_3(x_2 - 3k_2))$$

Таблиця 5 – Крок 2 розв’язання задачі (1) методом динамічного програмування

x_2	$28k_2 + f_3(x_2 - 3k_2)$				$f_2(x_2)$	k_{2opt}
	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$		
0	0+0=0	-	-	-	0	0
1	-	-	-	-	0	-
2	0+18=18	-	-	-	18	0
3	-	28+0=28	-	-	28	1
4	0+36=36	-	-	-	36	0
5	-	28+18=46	-	-	46	1
6	0+54=54	-	56+0=56	-	56	2
7	-	28+36=64	-	-	64	1
8	0+72=72	-	56+18=74	-	74	2
9	-	28+54=82	-	84+0=84	84	3
10	0+90=90	-	56+36=92	-	92	2

Крок 1. Див. табл. 6

$$f_1(x_1) = \max(C_1 k_1 + f_2(x_2)) = \max(46k_1 + f_2(x_1 - 3k_1))$$

Знаходимо тепер оптимальне рішення.

З останньої таблиці бачимо, що на першому кроці максимальний прибуток (92 гр. од.) можна отримати при $x_1 = 10$ ваг. од. Оптимальне завантаження предметів 1-го типу $k_1 = 0, 1$ або 2. Якщо на 1-му кроці завантажити 0 предметів, то на два наступні кроки залишиться вантаж $x_2 = 10$ ваг. од., для якого оптимальним є завантаження двох предметів 2-го типу (див. табл. 4). Це завантаження залишить на 3-й крок вантаж $x_3 = 10 - 2 \cdot 3 = 4$ ваг. од. Із

табл. 3 впевнюємося, що при $x_3 = 4$ оптимальним завантаженням буде завантаження двох предметів 3-го типу.

Таким чином, першим оптимальним рішенням є завантаження 2-х предметів 2-го та двох предметів 3-го типу.

Таблиця 6 – Крок 1 розв’язання задачі (1) методом динамічного програмування

x_1	$46k_1 + f_2(x_1 - 3k_1)$			$f_1(x_1)$	k_{1opt}
	$k_1 = 0$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$		
0	0+0=0	-	-	0	0
1	-	-	-	0	-
2	0+18=18	-	-	18	0
3	0+28=28	-	-	28	0
4	0+36=36	-	-	36	0
5	0+46=46	46+0=46	-	46	0,1
6	0+56=56	-	-	56	0
7	0+64=64	46+18=64	-	64	0,1
8	0+74=74	46+28=74	-	74	0,1
9	0+84=84	46+36=82	-	84	0
10	0+92=92	46+46=92	92+0=92	92	0,1,2

Якщо на 1-му кроці завантажити 1 предмет, то на два наступні кроки залишиться вантаж $x_2 = 10 - 5 = 5$ ваг. од., для якого, як видно з таблиці 4, оптимальним є завантаження одного предмета 2-го типу. Це завантаження залишить на 3-й крок вантаж $x_3 = 5 - 3 = 2$ ваг. од. Із таблиці 3 упевнюємося, що при $x_3 = 2$ оптимальним завантаженням буде завантаження одного предмета 3-го типу.

Другим оптимальним рішенням є завантаження по одному предмету кожного типу.

Якщо ж на 1-му кроці завантажити 2 предмети, то на два наступні кроки залишиться вантаж $x_2 = 10 - 2 \cdot 5 = 0$ ваг. од., тобто третім можливим оптимальним рішенням є завантаження двох предметів 1-го типу.

Висновки. З викладеного вище ми робимо висновок, що метод Гоморі не дає можливості знайти всі розв’язки, метод гілок та границь є досить витратним, а метод динамічного програмування є найбільш ефективним. Однак, слід зазначити, що при розв’язанні задачі оптимального завантаження декількох транспортних засобів, ефективність цього метода значно зменшується. Крім того, його застосування ускладнюється при розв’язанні задач багатокритеріальної оптимізації, коли ми маємо декілька цільових функцій (критеріїв оптимізації).

ЛІТЕРАТУРА

1. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction, 10th Edition, ISBN 9780134444017, Boston: Pearson, 2017, 848 pages
2. Harvey M. Wagner. Principles of Operations Research, with Applications to Managerial Decisions, 2nd Revised edition edition, ISBN 978-0137095926, Prentice Hall, 1975, 1039 pages
3. Ackoff, R. L., Sasieni, M. W. Fundamentals of Operations Research, ISBN 9780471003335, John Wiley and Sons, New York, 1968, 468 pages
4. Richard E. Bellman. Dynamic Programming. ISBN 9780691146683, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2010, 392 pages
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 352 с.

6. Гончаренко Я.В. Математичне програмування. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 184с.
7. Математичне програмування в прикладах і задачах / М.М. Крюков, Т.В. Крижановська, Л.В. Зубко, Т.М. Семененко, Т.С. Клецка. – Київ: ДЕТУТ, 2008. – 107с.
8. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій. – К.: Екомен, 2007. – 256с.
9. Моделювання та методи оптимізації транспортних процесів: навч. посіб./ Андрейцев А.Ю., Вяла Ю.Е., Гейлик А.В., Клецка Т.С., Кліндухова В.М., Крюков М.М., Ляшко О.В., Чабак Л.М. – К.: ДУІТ, 2020. – 117 с.
10. Дослідження операцій в транспортних системах: навч. посіб./ Андрейцев А.Ю., Вяла Ю.Е., Гейлик А.В., Клецка Т.С., Кліндухова В.М., Крюков М.М., Ляшко О.В., Чабак Л.М. – К.: ДУІТ, 2020. – 136 с.

REFERENCES

1. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction, 10th Edition, ISBN 9780134444017, Boston: Pearson, 2017, 848 pages
2. Harvey M. Wagner. Principles of Operations Research, with Applications to Managerial Decisions, 2nd Revised edition edition, ISBN 978-0137095926, Prentice Hall, 1975, 1039 pages
3. Ackoff, R. L., Sasieni, M. W. Fundamentals of Operations Research, ISBN 9780471003335, John Wiley and Sons, New York, 1968, 468 pages
4. Richard E. Bellman. Dynamic Programming. ISBN 9780691146683, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2010, 392 pages
5. Akulych Y.L. Matematycheskoe prohammyrovanye v prymerakh y zadachakh: Uchebnoe posobyе. 3-e uzd., ster. – SPb.: Yzdatelstvo «Lan», 2011. – 352 s.
6. Honcharenko Ya.V. Matematychnе prohamuvannia. – K.: NPU imeni M.P. Drahomanova, 2010. – 184s.
7. Matematychnе prohamuvannia v prykladakh i zadachakh / M.M. Kriukov, T.V. Kryzhanovska, L.V. Zubko, T.M. Semenenko, T.S. Kletska. – Kyiv: DETUT, 2008. – 107s.
8. Karahodova O.O., Kihel V.R., Rozhok V.D. Doslidzhennia operatsii. – K.: Ekomen, 2007. – 256s.
9. Modeliuvannia ta metody optymizatsii transportnykh protsesiv: navch. posib./ Andreitsev A.Iu., Viala Yu.E., Heilyk A.V., Kletska T.S., Klindukhova V.M., Kriukov M.M., Liashko O.V., Chabak L.M. – K.: DUIT, 2020. – 117 s.
10. Doslidzhennia operatsii v transportnykh systemakh: navch. posib./ Andreitsev A.Iu., Viala Yu.E., Heilyk A.V., Kletska T.S., Klindukhova V.M., Kriukov M.M., Liashko O.V., Chabak L.M. – K.: DUIT, 2020. – 136 s.

Андрейцев А.Ю., Вяла Ю.Э., Гейлик А.В., Клецкая Т.С., Ляшко О.В.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Данная статья посвящена сравнению методов решения задачи об оптимальной загрузке транспортного средства.

Рассматриваемая задача является одной из задач, которые наглядно демонстрируют преимущества математического моделирования в процессах выработки и принятия решений при планировании транспортных перевозок. Кроме того, данная задача является одной из существенных составляющих логистической программы при планировании доставки грузов.

Целью исследования являлось сравнение различных методов решения на примере задачи об оптимальной загрузке одного транспортного средства.

Эта задача относится к классу задач целочисленного линейного программирования. Существует целый ряд методов её решения. В статье рассмотрены некоторые из них.

Графический метод является самым простым и наглядным. Но его применение становится невозможным, если количество наименований грузов больше трёх.

Метод сечений Гомори основан на отсечении от области допустимых решений задачи с ослабленными ограничениями частей, не содержащих целочисленные решения. Однако, в случае наличия множества решений, он не позволяет найти все оптимальные планы.

Метод динамического программирования является одним из самых простых в применении и не требует громоздких вычислений при решении задач небольшой размерности.

Для демонстрации преимуществ и недостатков указанных методов рассмотрен абстрактный пример задачи оптимальной загрузки, имеющей несколько решений. Описан процесс решения данной задачи каждым из методов. Применение метода Гомори не позволяет найти все оптимальные решения. Метод ветвей и границ приводит к необходимости решения одиннадцати задач линейного программирования. Использование метода динамического программирования показывает, что он является эффективным и наиболее простым в применении.

В заключении, отмечено, что при увеличении количества наименований грузов, метод динамического программирования требует существенного увеличения объёма вычислений. Кроме того, применение данного метода затрудняется при решении задачи об оптимальной загрузке более чем одного транспортного средства.

Ключевые слова. *целочисленное программирование, метод ветвей и границ, метод Гомори, метод динамического программирования.*

Andreytsev A.Yu., Vyala Yu.E., Heylik A.V., Kletska T.S., Liashko O.V.

COMPARISON OF METHODS OF SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL LOADING OF A VEHICLE

This paper is devoted to a comparison of methods for solving the problem of optimal vehicle loading. The problem under consideration is one of the tasks that clearly demonstrate the advantages of mathematical modeling in the processes of development and decision making in transportation planning. In addition, this task is one of the essential components of the logistics program when planning the delivery of goods.

The aim of the study was to compare various solution methods using the example of one vehicle optimal loading problem.

This problem belongs to the class of integer linear programming problems. There are a number of methods for solving it. The article discusses some of them.

The graphical method is the simplest and most visual. But its usage becomes impossible if the number of goods is more than three.

The cutting-plane method is based on cutting off from the feasible solutions space to a problem with weakened constraints on parts that do not contain integer solutions. However, if there are a variety of solutions, it does not allow to find all the optimal plans.

The branch-and-bound method permits to find all the solutions. However, it requires solving a large sequence of linear programming problems.

The method of dynamic programming is one of the effortless and does not require cumbersome calculations when solving problems of small dimension.

To demonstrate the advantages and disadvantages of these methods, an abstract example of the optimal loading problem, which has several solutions, is considered. The process of solving this problem by each method is described. Application of the cutting-plane method does not allow to finding all optimal solutions. The branch-and-bound method makes it necessary to solve eleven linear programming problems. Using the dynamic programming method shows that it is efficient and not so time-consuming.

In conclusion, it is noted that with an increase in the number of goods, the dynamic programming method requires a significant increase in the volume of calculations. The application of this method is difficult when solving the problem of more than one vehicle optimal loading.

Keywords. *integer programming, Branch-and-Bound (B&B) method, cutting-plane method, dynamic programming method.*